Die Ermittlung der Sterblichkeits- und Invalidierungsgewinne nach der kontinuierlichen Methode

Verkürzte Fassung der

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde
vorgelegt der Philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Basel

von

Werner Bütler
aus Auw und Beinwil bei Muri
(Kt. Aargau)

Bern · Gedruckt bei Stämpfli & Cie · 1950

Die Ermittlung der Sterblichkeits- und Invalidierungsgewinne nach der kontinuierlichen Methode

Verkürzte Fassung der

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde
vorgelegt der Philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Basel

von

Werner Bütler

aus Auw und Beinwil bei Muri
(Kt. Aargau)

Bern · Gedruckt bei Stämpfli & Cie · 1950

Genehmigt von der Philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät auf Antrag der Herren Prof. Dr. E. Zwinggi und Dr. M. Gürtler.

Basel, den 3. November 1949.

Prof. Dr. Max Geiger-Huber
Dekan

Herrn Werner Bütler wurde von der Philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Basel am 7. März 1950 erlaubt, diese verkürzte Fassung seiner am 3. November 1949 genehmigten Inaugural-Dissertation drucken zu lassen. Die vollinhaltliche Arbeit kann eingesehen oder entliehen werden:

1. in der versicherungstechnischen Abteilung der mathematischen Anstalt der Universität Basel;
2. in der Universitätsbibliothek Basel;
3. in der Schweizerischen Landesbibliothek in Bern.

Meinen Eltern gewidmet

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544315_0061

Inhaltsverzeichnis

Seite

I. Einleitung und Problemstellung 7

II. Berechnung des Deckungskapitals 8

§ 1. Ausreichendes Deckungskapital für einen ganzzahligen Zeitpunkt 8

§ 2. Ausreichendes Deckungskapital für einen gebrochenen Zeitpunkt 9

III. Die Gewinnquellen 11

§ 1. Die Gewinne im Zeitmoment 11

IV. Die Sterblichkeitsgewinne im Versicherungsjahr 12

V. Die Sterblichkeitsgewinne im Rechnungsjahr 17

VI. Die Gewinne in der Invalidenversicherung 21

§ 1. Das ausreichende Deckungskapital 21

§ 2. Die Gewinne im Zeitmoment 22

§ 3. Die Risikogewinne im Versicherungsjahr 24

Zusammenfassung 25

Literaturverzeichnis 26

Curriculum vitae 27

I. Einleitung und Problemstellung

Zur Berechnung und Zerlegung der Gewinne war es in der Lebensversicherung bis heute ausschliesslich üblich, das diskontinuierliche Verfahren anzuwenden. Da aber die stetige Methode an Bedeutung mehr und mehr gewinnt (sie wird vor allem in den skandinavischen Ländern bevorzugt; kürzlich wurden auch die schweizerischen Gruppentarife auf kontinuierlicher Basis errechnet), sollte man auch die Erfolgsrechnung diesem Vorgehen angleichen. Wohl ist die Zerlegung der Gewinne für das Differential bekannt, aber eine Ausdehnung auf das Versicherungsjahr und Rechnungsjahr ist nach unseren Kenntnissen noch nicht erfolgt. Wir stellen uns deshalb die Aufgabe, die Berechnung der Sterblichkeits- und Invalidierungsgewinne stetig durchzuführen, wobei sich zwei Möglichkeiten abzeichnen:

a) Ganzstetige Methode: Alle auftretenden Grössen einschliesslich Prämie werden als stetige und differenzierbare Funktionen betrachtet. Dieses Verfahren besitzt mehr theoretischen Wert, und wir sehen davon ab, näher darauf einzugehen.

b) Halbstetige Methode: Die Prämie werde jährlich oder in endlichen Raten erhoben, die Versicherungsleistungen dagegen sollen stetig erfolgen.

Wir befassen uns ausführlich nur mit der Todes- und Erlebensfallversicherung. Einige kleine Umdeutungen ermöglichen jedoch die Übertragung der Ergebnisse auf die Altersrenten- und Invalidenversicherung, wobei wir uns an dieser Stelle auf das Vorgehen für die Invalidenversicherung beschränken werden.

II. Berechnung des Deckungskapitals

Je nach dem vom Versicherer gewählten Bilanzierungsverfahren treten in der Erfolgsrechnung das Nettodeckungskapital, das ausreichende Deckungskapital oder das vollständige Deckungskapital auf. Um den Formelapparat so einfach wie möglich zu halten, betrachten wir hier die Verhältnisse bei Annahme des ausreichenden Deckungskapitals. (Die Übertragung auf das Nettodeckungskapital folgt durch Weglassen aller Kostenteile; ebenso leicht könnten wir die Formeln bei Wahl des Zillmerdeckungskapitals bekommen).

Für das ausreichende Deckungskapital gelten die folgenden Zusammenhänge.

§ 1. Ausreichendes Deckungskapital für einen ganzzahligen Zeitpunkt

Bei Annahme jährlicher Prämienzahlung wird das prospektive Deckungskapital der gemischten Versicherung «1» für $t > 0$ gleich

$$ {}_tV_x^a = \bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|} + \gamma\, \tilde{a}_{x+t:\overline{n-t}|} - (1-\beta)\, P_x^a \mathrm{a}_{x+t:\overline{n-t}|}, \qquad (1) $$

wobei der Barwert der Belastung durch das Todes- und Erlebensfallkapital «1» gegeben ist durch

$$ \bar{A}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{l_x} \int_0^n e^{-\delta\tau} l_{x+\tau} \mu_{x+\tau}\, d\tau + \frac{e^{-\delta n} l_{x+n}}{l_x} $$

und der Rentenbarwert durch

$$ \tilde{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{l_x} \int_0^n e^{-\delta\tau} l_{x+\tau}\, d\tau = \frac{1}{\bar{D}_x} \int_0^n \bar{D}_{x+\tau}\, d\tau . $$

Es bedeutet wie üblich μ_x die Sterbeintensität, δ die Zinsintensität und α, β, γ die Unkostensätze bzw. Unkostenintensitäten.

Als wohl einfachste und üblichste Näherung für die im Rentenbarwert auftretenden Kommutationszahlen dürfte die Beziehung

$$\bar{N}_x = \int_0^\infty \bar{D}_{x+\tau}\, d\tau = \sum_{\tau=0}^{\infty} \bar{D}_{x+\tau} - \frac{\bar{D}_x}{2}$$

gelten. Schliesslich besteht zur Bestimmung von $\bar{A}_{x:\overline{n}|}$ der folgende Zusammenhang

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = 1 + \delta\, \bar{a}_{x:\overline{n}|}.$$

§ 2. Ausreichendes Deckungskapital für einen gebrochenen Zeitpunkt

Im ganzzahligen Zeitpunkt t verfügen wir über die Rücklage ${}_tV^a_x$, die durch (1) bestimmt ist. Zur Vereinfachung der Schreibweise sei fortan $V(\xi)$ an Stelle von ${}_{t+\xi}V^a_x$ gesetzt, also $V(0)$ an Stelle von ${}_tV^a_x$, ferner habe $f(\xi)$ den Sinn von $f(t+\xi)$, wobei den Funktionen durchwegs das Abschlussalter x zugrunde liegt. - In t geht die Prämie $P(0)$ ein, wovon aber sofort $\beta P(0)$ als für Unkosten verbraucht angesehen werden darf, so dass noch $V(0) + (1-\beta)P(0)$ wirklich vorhanden sind; diesen Betrag sehen wir als neues Deckungskapital $\bar{V}(0)$ an. (Wir fassen in diesem Zusammenhang also die Jahresprämie als eine Einmaleinlage auf, die mit $V(0)$ zusammen das neue Deckungskapital $\bar{V}(0)$ bildet.) Die Funktion $\bar{V}(\xi)$ entwickelt sich alsdann vollkommen stetig über das Jahr und geht am Jahresende in $V(1)$ über. Im gleichen Zeitpunkt vermehrt sich $V(1)$ für das neue Versicherungsjahr um $(1-\beta)P(1)$ zu $\bar{V}(1)$, und der stetige Ablauf über ein Versicherungsjahr setzt erneut ein. Die Funktion $\bar{V}(\xi)$ ist also stetig innerhalb eines Versicherungsjahres, nicht aber über mehrere Jahre gesehen; da wir jedoch in der Gewinnermittlung entweder ein ganzes Versicherungsjahr vor uns haben oder die Vorgänge aus zwei absolut getrennten Teilen eines Versicherungsjahres zusammensetzen können, wenn das Rechnungsjahr nicht mit dem Versicherungsjahr zusammenfällt, lassen sich die weiteren Untersuchungen doch unter Annahme des stetigen Ablaufs durchführen.

Zur Bestimmung des ausreichenden Deckungskapitals für einen gebrochenen Zeitpunkt aus den ganzzahligen Werten geht man vorteilhaft von der Differentialgleichung des Deckungskapitals aus. Es

gilt für $\overline{V}(\xi)$

$$\overline{V}'(\xi) - (\delta + \mu(\xi))\,\overline{V}(\xi) + \mu(\xi) + \gamma = 0. \tag{2}$$

Beziehung (2) stellt eine lineare Differentialgleichung von der Form

$$y'(\xi) + \varphi(\xi)\,y(\xi) + f(\xi) = 0$$

dar, deren Quadratur für unsere Zwecke von den bekannten Regeln etwas abweichend vorzunehmen ist. Setzen wir

$$\begin{aligned} y(\xi) &= \overline{V}(\xi), \\ \varphi(\xi) &= -\delta, \\ f(\xi) &= -\{\mu(\xi)\,\overline{V}(\xi) - \mu(\xi) - \gamma\}, \end{aligned}$$

(wir lassen also in $f(\xi)$ die gesuchte Funktion $\overline{V}(\xi)$ selbst auftreten), so wird

$$\overline{V}(k) = e^{\delta k}\,\overline{V}(0) + \int_0^k e^{\delta(k-\xi)}\,\{\mu(\xi)\,\overline{V}(\xi) - \mu(\xi) - \gamma\}\,d\xi. \tag{3}$$

Der Integrand in (3) lässt sich aber wegen (2) durch $\overline{V}'(\xi) - \delta\,\overline{V}(\xi)$ ersetzen, so dass für das Deckungskapital folgt

$$\overline{V}(k) = e^{\delta k}\,\overline{V}(0) + \int_0^k e^{\delta(k-\xi)}\,(\overline{V}'(\xi) - \delta\,\overline{V}(\xi))\,d\xi. \tag{4}$$

Lässt man die plausible Näherung

$$\int_0^k e^{\delta(k-\xi)}\,(\overline{V}'(\xi) - \delta\,\overline{V}(\xi))\,d\xi \sim k \int_0^1 e^{\delta(1-\xi)}\,(\overline{V}'(\xi) - \delta\,\overline{V}(\xi))\,d\xi \tag{5}$$

gelten und integriert dann partiell, so erhält man schliesslich aus (4) für das ausreichende Deckungskapital den Ausdruck

$$\overline{V}(k) = e^{\delta k}\,\overline{V}(0) + k\,(\overline{V}(1) - e^{\delta}\,\overline{V}(0)).$$

Da nach unseren Festsetzungen $\overline{V}(0) = V(0) + (1-\beta)\,P(0)$ und $\overline{V}(1) = V(1)$ ist, wird auch

$$\overline{V}(k) = V(0)\,(e^{\delta k} - k e^{\delta}) + k\,V(1) + (1-\beta)\,P(0)\,(e^{\delta k} - k e^{\delta}). \tag{6}$$

In (6) bedeutet

$$V(0)\,(e^{\delta k} - k e^{\delta}) + k\,V(1) \tag{7}$$

das Bilanzdeckungskapital, während

$$(1-\beta)\,P(0)\,(e^{\delta k} - k e^{\delta}) \tag{8}$$

den Prämienübertrag darstellt.

III. Die Gewinnquellen

Bei Wahl des ausreichenden Deckungskapitals können drei Arten von Überschüssen (oder Verlusten) entstehen: *a)* Sterblichkeitsgewinne, *b)* Zinsgewinne und *c)* Unkostengewinne. Diese drei Gewinnkomponenten sollen vorerst für das Zeitelement $t + \xi$ bis $t + \xi + d\xi$ bestimmt werden.

Durch μ, δ, α, β, γ sei der rechnungsmässige Ablauf gegeben, während μ', δ', α', β', γ' den tatsächlichen beschreibe.

§ 1. Die Gewinne im Zeitmoment

Für einen willkürlichen Bestand $l(\xi)$ verfügen wir im Zeitpunkt $t + \xi$ $(0 < \xi \leqslant 1)$ über die Rücklage $l(\xi)\,\overline{V}(\xi)$. Eine Prämie geht nicht ein, da diese jährlich zu Beginn des Versicherungsjahres erhoben wird. Der Wert der Rücklage wächst bis $t + \xi + d\xi$ «wirklich» auf $l(\xi)\,\overline{V}(\xi)\,(1 + \delta'\,d\xi)$ an. Die in $d\xi$ sterbenden Versicherten beanspruchen an Todesfallsummen «wirklich» $l(\xi)\,\mu'(\xi)\,d\xi$. Für die Überlebenden ist am Ende des betrachteten Zeitintervalles die Rücklage $l(\xi)\,\{(\overline{V}(\xi) + d\,\overline{V}(\xi)) - \mu'(\xi)\,\overline{V}(\xi)\,d\xi\}$ zu stellen. Schliesslich sind $l(\xi)\,\gamma'(1 + \delta'\,d\xi)\,d\xi$ die «tatsächlich» ausgelegten Unkosten, Wert im Zeitpunkt $t + \xi + d\xi$. (Die Komponente β wurde schon zu Beginn des Versicherungsjahres verrechnet.) Der auf der Gesamtheit erzielte Gewinn ergibt sich durch Differenzenbildung zwischen Einnahmen und Ausgaben; in diesen Gewinn haben sich $l(\xi)\,(1 - \mu'(\xi)\,d\xi)$ Überlebende zu teilen. Sieht man von kleinen Grössen zweiter Ordnung ab und bezeichnet den Anteil eines Versicherten mit $g(\xi)\,d\xi$, so wird

$$g(\xi)\,d\xi = \overline{V}(\xi)\,(1 + \delta'\,d\xi) - \mu'(\xi)\,d\xi - \gamma'\,d\xi - (1 - \mu'(\xi)\,d\xi)\,\overline{V}(\xi) - d\,\overline{V}(\xi).$$

Durch Hinzufügen von Gliedern derart, dass die Rekursionsformel für das Deckungskapital,

$$\overline{V}(\xi)\,(1 + \delta\,d\xi) - \mu(\xi)\,d\xi - \gamma\,d\xi - (1 - \mu(\xi)\,d\xi)\,\overline{V}(\xi) - d\,\overline{V}(\xi) = 0, \quad (9)$$

auftritt, ergibt sich für $g(\xi)\,d\xi$ die Darstellung

$$g(\xi)\,d\xi = (1 - \overline{V}(\xi))\,(\mu(\xi) - \mu'(\xi))\,d\xi + \overline{V}(\xi)\,(\delta' - \delta)\,d\xi + (\gamma - \gamma')\,d\xi. \quad (10)$$

Das Glied
$$(1 - \overline{V}(\xi))\,(\mu(\xi) - \mu'(\xi))\,d\xi \tag{11}$$
stellt den *Sterblichkeitsgewinn* in $d\xi$ für einen überlebenden Versicherten dar. Ferner bedeutet
$$\overline{V}(\xi)\,(\delta' - \delta)\,d\xi \tag{12}$$
den *Zinsgewinn,* und schliesslich ist
$$(\gamma - \gamma')\,d\xi \tag{13}$$
der *Unkostengewinn.*

Für $\xi = 0,\ t \neq 0$ geht $\overline{V}(\xi)$ über in $V(0) + (1 - \beta)\,P(0)$, und der Unkostengewinn wird gleich $(\beta - \beta')\,P(0) + (\gamma - \gamma')\,d\xi$. Bei $\xi = 0,\ t = 0$ ist, sofern keine Einmalprämie entrichtet worden ist, der Zinsgewinn gleich $-\alpha\,(\delta' - \delta)$ und der Unkostengewinn gleich $(\beta - \beta')\,P(0) + (\gamma - \gamma')\,d\xi + (\alpha - \alpha')$.

IV. Die Sterblichkeitsgewinne im Versicherungsjahr

Obwohl Rechnungsjahr und Versicherungsjahr im allgemeinen nicht zusammenfallen, ist es zweckmässig, die Bestimmung der Sterblichkeitsgewinne zuerst auf das Ende des Versicherungsjahres vorzunehmen und erst anschliessend auf das Rechnungsjahr (Kalenderjahr) überzugehen. Das will allerdings nicht heissen, dass dem Sterblichkeitsgewinn Ende Versicherungsjahr nur die Bedeutung einer Hilfsgrösse zukommt. In der Personalversicherung vor allem bevorzugt der Versicherungsnehmer aus bilanztechnischen Gründen, Versicherungsjahr und Rechnungsjahr (Kalenderjahr) zusammenfallen zu lassen. Die gleiche Bemerkung gilt teilweise auch für die staatliche Versicherung.

Formel (11) für den Sterblichkeitsgewinn ist für die numerische Berechnung nicht geeignet, da die in ihr auftretenden Grössen explizit nicht in der Erfolgsrechnung auftreten. Gestützt auf (2) können wir jedoch $\mu(\xi)\,(1 - \overline{V}(\xi))\,d\xi$ durch $(\delta\,\overline{V}(\xi) - \overline{V}'(\xi) - \gamma)\,d\xi$ ersetzen [1]).

[1]) Formel (2) lässt sich auch schreiben als
$$\mu(\xi)\,(1 - \overline{V}(\xi)) + \overline{V}'(\xi) - \delta\,\overline{V}(\xi) + \gamma = 0,$$
worin in Analogie zur diskontinuierlichen wie auch zur vollständig stetigen Methode das Glied $\mu(\xi)(1 - \overline{V}(\xi))$ formal der Risikoprämie, $\overline{V}'(\xi) - \delta\,\overline{V}(\xi)$ der Sparprämie und γ der Unkostenprämie entspricht. Wegen der Zusammenfassung von Deckungskapital V und Prämie P zu einem neuen Deckungskapital $\overline{V}$ tritt ausser in $\xi = 0$ keine Prämie auf, so dass bei der halbstetigen Methode die eigentliche Aufspaltung der Prämie in die Teile Risiko-, Spar- und Unkostenprämie entfällt.

Der Sterblichkeitsgewinn in $d\xi$ erhält damit die Form

$$(\delta \bar{V}(\xi) - \bar{V}'(\xi) - \gamma)\, d\xi - \mu'(\xi)\,(1 - \bar{V}(\xi))\, d\xi . \tag{14}$$

Abkürzend bezeichnen wir in (14) die erste Klammer $(\delta \bar{V}(\xi) - \bar{V}'(\xi) - \gamma)$ mit $f(\xi)$ und die Risikoschadensumme $\mu'(\xi)\,(1 - \bar{V}(\xi))$ mit $-g(\xi)$, wobei wir uns später zu erinnern haben, dass $f(\xi)$ und $g(\xi)$ auch Funktionen von x und t sind. Der Sterblichkeitsgewinn in $d\tau$ nimmt damit die Form an,

$$\text{Sterblichkeitsgewinn} = \{f(\tau) + g(\tau)\}\, d\tau . \tag{15}$$

Multiplizieren wir Beziehung (14) mit $e^{\delta(1-\tau)}$, so erhalten wir den Sterblichkeitsgewinn in $d\tau$ Wert am Ende des Versicherungsjahres. Demgemäss können wir die Integrale

$$\int_{\xi}^{1} e^{\delta(1-\tau)} f(\tau)\, d\tau + \int_{\xi}^{1} e^{\delta(1-\tau)}\, g(\tau)\, d\tau \tag{16}$$

als Summe der aufgezinsten, über die Zeitspanne $t + \xi$ bis $t + 1$ entstandenen Sterblichkeitsgewinne, d. h. als totalen Sterblichkeitsgewinn über die Spanne $t + \xi$ bis $t + 1$ Wert im Zeitpunkt $t + 1$, ansehen. Zur Vereinfachung der Bezeichnungsweise sei mit $F(\xi)$ das erste der in (16) auftretenden Integrale bezeichnet, das ausgewertet

$$F(\xi) = \bar{V}(\xi)\, e^{\delta(1-\xi)} - \bar{V}(1) - \gamma\, \frac{e^{\delta(1-\xi)} - 1}{\delta} \tag{17}$$

ergibt.

Gleichung (16) gilt für die Summe «1»; um auf den Sterblichkeitsgewinn in einem Bestand gleichartiger Versicherungen übergehen zu können, müssen zunächst die Grössen, welche die Entwicklung des Bestandes angeben, festgelegt werden.

Es sei $S(x, t)$ der Summenbestand zu Beginn und $S(x, t + 1)$ am Ende des Versicherungsjahres, wobei x das Alter beim rechnungsmässigen Beginn und t die (ganzzahlige) abgelaufene Versicherungsdauer sind. Wie früher ersetzen wir allgemein die Argumentswerte $(x, t + \xi)$ durch (ξ). Der Anfangsbestand $S(0)$ verändere sich im Laufe des Versicherungsjahres durch Ein- und Austritte, die im Sinne der gewählten Methode (mit Ausnahme der Abläufe natürlich) als stetig erfolgend anzusehen sind. In $d\tau$ sollen an Summen durch Tod $T(\tau)\, d\tau$ und durch vorzeitige Vertragsauflösung $A(\tau)\, d\tau$ abgehen; umgekehrt

vermehren Neueintritte (Umwandlungen, Neuinkrafttretungen) in der Höhe von $E(\tau)\,d\tau$ den Bestand. Der Bestand $S(\xi)$ für $0<\xi<1$ ist dann darstellbar als

$$S(\xi) = S(0) + \int_0^{\xi} (E(\tau) - A(\tau) - T(\tau))\,d\tau\,. \tag{18}$$

Wir bilden das Produkt

$$e^{\delta(1-\xi)}\,S(\xi)\,(f(\xi) + g(\xi))\,d\xi\,; \tag{19}$$

es stellt den Sterblichkeitsgewinn in $d\xi$ für den Bestand $S(\xi)$ dar, wertmässig auf das Ende des Versicherungsjahres bezogen. Der Sterblichkeitsgewinn über das ganze Jahr, den wir mit g bezeichnen, folgt aus der Integration von (19); also

$$g = \int_0^1 e^{\delta(1-\xi)}\,S(\xi)\,(f(\xi) + g(\xi))\,d\xi\,. \tag{20}$$

Setzen wir für $S(\xi)$ noch (18) ein, so wird

$$g = \int_0^1 \left\{S(0) + \int_0^{\xi} (E(\tau) - A(\tau) - T(\tau))\,d\tau\right\} e^{\delta(1-\xi)}\,(f(\xi) + g(\xi))\,d\xi\,. \tag{21}$$

Die einzelnen Glieder in (21) lassen sich wie folgt umformen. Aus (17) erkennt man, dass

$$S(0)\int_0^1 e^{\delta(1-\xi)}\,f(\xi)\,d\xi = S(0)\,F(0)\,.$$

Das Doppelintegral

$$\int_0^1 e^{\delta(1-\xi)}\,f(\xi)\int_0^{\xi} (E(\tau) - A(\tau) - T(\tau))\,d\tau\,d\xi$$

kann auch geschrieben werden als

$$\int_0^1 (E(\tau) - A(\tau) - T(\tau))\int_{\tau}^1 e^{\delta(1-\xi)}\,f(\xi)\,d\xi\,d\tau = \int_0^1 (E(\tau) - A(\tau) - T(\tau))\,F(\tau)\,d\tau\,.$$

Setzen wir für $e^{\delta(1-\tau)}\,\overline{V}(\tau)$ linearen Verlauf im Versicherungsjahr voraus, so wird

$$\int_0^1 e^{\delta(1-\tau)}\,\overline{V}(\tau)\,d\tau \sim \frac{\overline{V}(0)\,e^{\delta} + \overline{V}(1)}{2}\,.$$

Für $\int_0^1 E(\tau)\, e^{\delta(1-\tau)}\, \overline{V}(\tau)\, d\tau$ ist alsdann die Näherung

$$\frac{\overline{V}(0)\, e^{\delta} + \overline{V}(1)}{2} \int_0^1 E(\tau)\, d\tau = \frac{\overline{V}(0)\, e^{\delta} + \overline{V}(1)}{2}\, E(0)$$

zulässig, wo $E(0)$ den Neuzugang über das ganze Versicherungsjahr bedeutet. Gleichlautende Darstellungen sind für die Ausscheidefälle $A(\tau)$ und $T(\tau)$ möglich. Ganz entsprechend behandeln wir den Ausdruck

$$\int_0^1 (E(\tau) - A(\tau) - T(\tau)) \frac{e^{\delta(1-\tau)} - 1}{\delta}\, d\tau,$$

der unter Voraussetzung linearen Verlaufs von $\frac{e^{\delta(1-\tau)} - 1}{\delta}$ sich durch

$$\frac{e^{\delta} - 1}{2\,\delta} \int_0^1 (E(\tau) - A(\tau) - T(\tau))\, d\tau = \frac{e^{\delta} - 1}{2\,\delta} (E(0) - A(0) - T(0))$$

approximieren lässt. Sodann wird wegen $S(\xi)\, \mu'(\xi) = T(\xi)$ die Risikoschadensumme der Gruppe

$$\int_0^1 e^{\delta(1-\xi)}\, S(\xi)\, g(\xi)\, d\xi = \int_0^1 e^{\delta(1-\xi)}\, T(\xi)\, (1 - \overline{V}(\xi))\, d\xi,$$

wofür die Näherung

$$T(0) \int_0^1 e^{\delta(1-\xi)}\, (1 - \overline{V}(\xi))\, d\xi \sim T(0) \left\{ \frac{e^{\delta} - 1}{\delta} - \frac{\overline{V}(0)\, e^{\delta} + \overline{V}(1)}{2} \right\}$$

erlaubt ist.

Indem wir zur allgemein üblichen Schreibweise zurückkehren und $\overline{V}(0)$ durch $V(0) + (1 - \beta)\, P$ — mit P sei die während der ganzen Versicherungsdauer als konstant angenommene Jahresprämie bezeichnet — und $\overline{V}(1)$ durch $V(1)$ ersetzen, so wird der Sterblichkeitsgewinn im Versicherungsjahr

$$\left.\begin{aligned} & S(x,t)\, ({}_tV_x^a + P_x^a)\, e^{\delta} + (E(t) - A(t) - T(t)) \left\{ \frac{{}_tV_x^a\, e^{\delta} + {}_{t+1}V_x^a}{2} + \frac{P_x^a}{2}\, e^{\delta} \right\} \\ & - S(x, t+1)\, {}_{t+1}V_x^a - \left\{ S(x,t) + \frac{E(t) - A(t) - T(t)}{2} \right\} \left(\beta P_x^a e^{\delta} + \gamma\, \frac{e^{\delta} - 1}{\delta} \right) \\ & - T(t) \left\{ \frac{e^{\delta} - 1}{\delta} - \frac{{}_tV_x^a\, e^{\delta} + {}_{t+1}V_x^a}{2} - \frac{(1-\beta)\, P_x^a}{2} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Das Resultat (22) fassen wir in ein Einnahmen- und Ausgabenschema zusammen. Wir verzichten dabei, die Verzinsung selbständig auftreten zu lassen; alle Posten verstehen sich, ohne dass dies besonders vermerkt wird, Wert Ende Versicherungsjahr.

I) *Einnahmen*

a) $S(x,t)\,{}_tV_x^a e^\delta$: Deckungskapital zu Beginn des Versicherungsjahres des Bestandes zu Beginn des Versicherungsjahres.

b) $\left(S(x,t)+\frac{E(t)}{2}\right)P_x^a e^\delta$: Prämieneinnahme herrührend vom Bestand zu Beginn des Versicherungsjahres und Prämienübertrag für neuhinzugekommene Versicherungen.

c) $E(t)\cdot\frac{{}_tV_x^a e^\delta+{}_{t+1}V_x^a}{2}$: Eintrittsdeckungskapital für die neuhinzugekommenen Versicherungen.

II) *Ausgaben*

a) $S(x,t+1)\,{}_{t+1}V_x^a$: Deckungskapital am Ende des Versicherungsjahres des Bestandes am Ende des Versicherungsjahres.

b) $(A(t)+T(t))\left\{\frac{{}_tV_x^a e^\delta+{}_{t+1}V_x^a}{2}+\frac{P_x^a}{2}e^\delta\right\}$: Deckungskapital für die im Laufe des Jahres ausgeschiedenen Versicherungen [1]).

c) $\left(S(x,t)+\frac{E(t)-A(t)-T(t)}{2}\right)\left(\beta P_x^a e^\delta+\gamma\frac{e^\delta-1}{\delta}\right)$: Rechnungsmässige Unkosten für den Durchschnittsbestand.

d) $T(t)\left(\frac{e^\delta-1}{\delta}-\frac{{}_tV_x^a e^\delta+{}_{t+1}V_x^a}{2}-\frac{(1-\beta)P_x^a}{2}\right)$: Risikoschadensumme für die durch Tod erloschenen Versicherungen.

Den Ausdruck $S(x,t)+\frac{E(t)-A(t)-T(t)}{2}$ benennen wir als «Durchschnittsbestand».

---

[1]) Wegen der Einführung des Deckungskapitals V_x^a geht mit dem gewöhnlichen Deckungskapital V_x^a auch ein Teil der Prämie ab.

V. Die Sterblichkeitsgewinne im Rechnungsjahr

Weil sich die Versicherungsabschlüsse in der Regel über das ganze Jahr verteilen — also Versicherungsjahr und Rechnungsjahr nicht zusammenfallen — umfasst das Rechnungsjahr Teile zweier aufeinanderfolgender Versicherungsjahre. Im allgemeinen darf angenommen werden, dass eine gleichmässige Verteilung der Abschlüsse über das Rechnungsjahr vorhanden ist; es ist also erlaubt festzulegen, das Versicherungsjahr beginne einheitlich in der Mitte des Rechnungsjahres. Um unseren Ausführungen den allgemeinen Charakter nicht zu nehmen, sei jedoch für eine Versicherung mit Abschlussalter x und verflossener Versicherungsdauer $t-1$ der Beginn des Rechnungsjahres auf $t-1+k$ mit $0 \leqslant k < 1$ festgelegt. Je nach Art der Verteilung der Versicherungen über das Rechnungsjahr wird dann dem Bestande ein bestimmter Wert von k zugeordnet (gleichmässige Verteilung ergibt $k = \frac{1}{2}$).

Für die Darstellung des Sterblichkeitsgewinnes erweist sich eine Zweiteilung von Vorteil. Zuerst untersuchen wir den *ersten Teil* des Rechnungsjahres, d. h. den zweiten Teil des Versicherungsjahres $t-1$; in k ausgedrückt also die Zeitspanne von $t-1+k$ bis t. Zu Beginn des Rechnungsjahres steht nach (6) dem Versicherer das Bilanzdeckungskapital ${}_{t-1}V^a_x(e^{\delta k} - k\,e^{\delta}) + k\,{}_tV^a_x$ und der Prämienübertrag $P^a_x(1-\beta)(e^{\delta k} - k\,e^{\delta})$ zur Verfügung; im gesamten verfügt er also über das sich stetig entwickelnde Deckungskapital ${}_{t-1+k}\overline{V}^a_x$. Erst im Zeitpunkt t, dem Beginn des neuen Versicherungsjahres, gehen nach unseren Voraussetzungen Prämien ein. Demgemäss liefert uns der erste Teil vollkommen stetige Verhältnisse.

Die Bestandesentwicklung erfolge nach dem folgenden Schema, wobei wir wie früher die Argumentswerte $(x, t+k)$ durch (k) ersetzen:

	$t-1+k$	t	$t+k$
Bestand Anfang Rechnungsjahr	$S(k-1)$		
Neuhinzugekommene Versicherungen	$E''(-1)$	$E'(0)$	
Durch Tod erloschene Versicherungen	$T''(-1)$	$T'(0)$	
Vorzeitig Austretende[1])	$A''(-1)$	$A'(0)$	
Bestand Ende Versicherungsjahr		$S(0)$	
Bestand Ende Rechnungsjahr			$S(k)$

[1]) Sofern sich eine Versicherung im letzten Versicherungsjahr befindet, käme noch eine Zeile mit den Abläufen hinzu; im Zeitpunkt t würde diese Versicherung aus der Beobachtung ausscheiden.

Im weiteren haben wir das Vorgehen in Abschnitt IV sinngemäss zu übertragen. Der Bestand $S(k-1+\xi)$ mit $0 \leqslant \xi < 1-k$ ist durch

$$S(k-1+\xi) = S(k-1) + \int_0^{\xi} (E''(k-1+\tau) - A''(k-1+\tau) - T''(k-1+\tau))\, d\tau \quad (23)$$

dargestellt. Sodann beachten wir, dass Beziehung (14) bzw. (15) den Sterblichkeitsgewinn in $d\xi$ angibt, wobei aber noch t durch $t-1$ zu ersetzen ist. Bezeichnen wir schliesslich mit g''_{t-1} die Summe der Sterblichkeitsgewinne im ersten Teil des Rechnungsjahres, wertmässig auf t bezogen, so wird

$$g''_{t-1} = \int_0^{1-k} e^{\delta(1-k-\xi)} S(k-1+\xi) \cdot$$
$$\cdot \{\delta \overline{V}(k-1+\xi) - \overline{V}'(k-1+\xi) - \gamma - \mu'(k-1+\xi)(1-\overline{V}(k-1+\xi))\}\, d\xi. \quad (24)$$

Ferner ist daran zu erinnern, dass das Deckungskapital $\overline{V}(0)$ mit $V(0)$ zusammenfällt, da es sich um die Rücklage am Ende eines Versicherungsjahres handelt.

Mit sinngemässer Übertragung der Voraussetzungen und Berechnungen des Abschnittes IV wird (24) umgeformt in

$$g''_{t-1} = S(k-1)\,\overline{V}(k-1)\,e^{\delta(1-k)} + (E''(-1) - A''(-1) - T''(-1)) \frac{\overline{V}(k-1)\,e^{\delta(1-k)} + V(0)}{2}$$
$$- S(0)\,V(0) - \left\{S(k-1) + \frac{E''(-1) - A''(-1) - T''(-1)}{2}\right\}(1-k)\,\gamma\,\frac{e^{\delta(1-k)}-1}{\delta}$$
$$- T''(-1)\left\{\frac{e^{\delta(1-k)}-1}{\delta} - \frac{\overline{V}(k-1)\,e^{\delta(1-k)} + V(0)}{2}\right\}. \quad (25)$$

Die gleichen Überlegungen führen zum Sterblichkeitsgewinn im *zweiten Teil* des Rechnungsjahres. Diesmal aber ist das vorkommende Deckungskapital $\overline{V}(0)$ mit $V(0) + (1-\beta)P$ identisch. Demgemäss erhält der Sterblichkeitsgewinn g_t der zweiten Periode, auf den Zeitpunkt $t+k$ bewertet, die Form

$$g'_t = S(0)\,\overline{V}(0)\,e^{\delta k} + (E'(0) - A'(0) - T'(0)) \frac{\overline{V}(0)\,e^{\delta k} + \overline{V}(k)}{2} - S(k)\,\overline{V}(k)$$
$$- \left\{S(0) + \frac{E'(0) - A'(0) - T'(0)}{2}\right\} k\,\gamma\,\frac{e^{\delta k}-1}{\delta} - T'(0)\left\{\frac{e^{\delta k}-1}{\delta} - \frac{\overline{V}(0)\,e^{\delta k} + \overline{V}(k)}{2}\right\}. \quad (26)$$

Schliesslich liefert uns die Addition von (25) und (26) den erzielten Sterblichkeitsgewinn bei Bewertung auf das Ende des Rechnungsjahres. Es ist in der üblichen Schreibweise

$$= S(x,t-1+k)\,{}_{t-1+k}V^a_x e^{\delta} + E''(t-1)\,\frac{{}_{t-1+k}V^a_x e^{\delta(1-k)} + {}_tV^a_x e^{\delta k}}{2} + E''(t)\,\frac{{}_tV^a_x e^{\delta k} + {}_{t+k}V^a_x}{2}$$

$$+ S(x,t-1+k)\,h(k)\,P^a_x e^{\delta} + S(x,t)\,P^a_x e^{\delta k} + (E''(t-1) + A''(t-1) + T''(t-1))\,h(k)\,\frac{P^a_x}{2} e^{\delta}$$

$$+ (E'(t) - A'(t) - T'(t))\,(e^{\delta k} + h(k))\,\frac{P^a_x}{2} - S(x,t+k)\,{}_{t+k}V^a_x - S(x,t+k)\,h(k)\,P^a_x$$

$$(A''(t-1) + T''(t-1))\,\frac{{}_{t-1+k}V^a_x e^{\delta(1-k)} + {}_tV^a_x}{2} e^{\delta k} - (A'(t) + T'(t))\,\frac{{}_tV^a_x e^{\delta k} + {}_{t+k}V^a_x}{2}$$

$$\left\{h(k)\,e^{\delta}\left(S(x,t-1+k) + \frac{E''(t-1) - A''(t-1) - T''(t-1)}{2}\right) + S(x,t)\,e^{\delta k} - h(k)\,S(x,t+k)\right.$$

$$\left. + (e^{\delta k} + h(k))\,\frac{E'(t) - A'(t) - T'(t)}{2}\right\}\beta\,P^a_x$$

$$\left(S(x,t-1+k) - \frac{E''(t-1) - A''(t-1) - T''(t-1)}{2}\right)(1-k)\,\gamma\,e^{\delta k}\,\frac{e^{\delta(1-k)}-1}{\delta}$$

$$-\left(S(x,t) + \frac{E'(t) - A'(t) - T'(t)}{2}\right)k\gamma\,\frac{e^{\delta k}-1}{\delta}$$

$$T''(t-1)\left\{\frac{e^{\delta(1-k)}-1}{\delta} - \frac{{}_{t-1+k}V^a_x e^{\delta(1-k)} + {}_tV^a_x}{2}\,e^{\delta k} - h(k)\,\frac{P^a_x}{2}\,(1-\beta)\,e^{\delta}\right\}$$

$$T'(t)\left\{\frac{e^{\delta k}-1}{\delta} - \frac{{}_tV^a_x e^{\delta k} + {}_{t+k}V^a_x}{2} - (e^{\delta k} + h(k))\,\frac{P^a_x}{2}\,(1-\beta)\right\}. \qquad 27$$

Hierin bedeutet ${}_{t+k}V^a_x = {}_tV^a_x\,h(k) + k\,{}_{t+1}V^a_x$ und $h(k) = e^{\delta k} - k\,e^{\delta}$. Der Ausdruck für ${}_{t-1+k}V^a_x$ ergibt sich, falls man t in $t-1$ übergehen lässt.

Dieses Ergebnis bringen wir für $k = \frac{1}{2}$ in ein Einnahmen- und Ausgabenschema, wobei wir wiederum die Verzinsung nicht selbständig auftreten lassen.

I) *Einnahmen*

a) $S(x, t-\frac{1}{2})\ {}_{t-\frac{1}{2}}V_x^a e^{\delta}$: Deckungskapital zu Beginn des Rechnungsjahres des Bestandes zu Beginn des Rechnungsjahres.

b) $S(x,t)\, P_x^a e^{\frac{\delta}{2}}$: Prämieneinnahme herrührend vom Bestande in der Mitte des Rechnungsjahres.

c) $S(x, t-\frac{1}{2})\, h(\frac{1}{2})\, P_x^a e^{\delta}$: Prämienübertrag des Bestandes zu Beginn des Rechnungsjahres.

d) $\left\{E''(t-1)\, h(\frac{1}{2})\, e^{\delta} + \left(e^{\frac{\delta}{2}} + h(\frac{1}{2})\right) E'(t)\right\} \frac{P_x^a}{2}$: Prämienübertrag der Neueintritte.

e) $E''(t-1)\, \frac{{}_{t-\frac{1}{2}}V_x^a e^{\frac{\delta}{2}} + {}_tV_x^a}{2}\, e^{\frac{\delta}{2}}$: Eintrittsdeckungskapital für die in der ersten Hälfte des Rechnungsjahres neuhinzugekommenen Versicherungen.

f) $E'(t)\, \frac{{}_tV_x^a e^{\frac{\delta}{2}} + {}_{t+\frac{1}{2}}V_x^a}{2}$: Eintrittsdeckungskapital für die in der zweiten Hälfte des Rechnungsjahres neuhinzugekommenen Versicherungen.

II) *Ausgaben*

a) $S(x, t+\frac{1}{2})\ {}_{t+\frac{1}{2}}V_x^a$: Deckungskapital am Ende des Rechnungsjahres des Bestandes am Ende des Rechnungsjahres.

b) $(A''(t-1) + T''(t-1)) \left\{ \frac{{}_{t-\frac{1}{2}}V_x^a e^{\frac{\delta}{2}} + {}_tV_x^a}{2} + h(\frac{1}{2}) \frac{P_x^a}{2} e^{\frac{\delta}{2}} \right\} e^{\frac{\delta}{2}}$: Deckungskapital für die in der ersten Hälfte des Rechnungsjahres ausgeschiedenen Versicherungen [1]).

c) $(A'(t) + T'(t)) \left\{ \frac{{}_tV_x^a e^{\frac{\delta}{2}} + {}_{t+\frac{1}{2}}V_x^a}{2} + \left(e^{\frac{\delta}{2}} + h(\frac{1}{2})\right) \frac{P_x^a}{2} \right\}$: Deckungskapital für die in der zweiten Hälfte des Rechnungsjahres ausgeschiedenen Versicherungen [1]).

---

[1]) Wegen der Einführung des Deckungskapitals $\overline{V}_x^a$ geht mit dem gewöhnlichen Deckungskapital V_x^a auch ein Teil der Prämie ab.

d) $S(x,t+\frac{1}{2})\,h(\frac{1}{2})\,P_x^a$: Prämienübertrag des Bestandes am Ende des Rechnungsjahres.

$$e)\ \beta P_x^a \Big\{ h(\tfrac{1}{2})\, e^{\delta} \Big(S(x,t-\tfrac{1}{2}) + \frac{E''(t-1)-A''(t-1)-T''(t-1)}{2} \Big)$$

$$+ S(x,t)\, e^{\frac{\delta}{2}} - h(\tfrac{1}{2})\, S(x,t+\tfrac{1}{2}) + \Big(e^{\frac{\delta}{2}} + h(\tfrac{1}{2}) \Big) \frac{E'(t)-A'(t)-T'(t)}{2} \Big\} + \frac{\gamma}{2} \frac{e^{\frac{\delta}{2}}-1}{\delta} \cdot$$

$$\cdot \Big\{ e^{\frac{\delta}{2}} \Big(S(x,t-\tfrac{1}{2}) + \frac{E''(t-1)-A''(t-1)-T''(t-1)}{2} \Big) + \Big(S(x,t) + \frac{E'(t)-A'(t)-T'(t)}{2} \Big) \Big\}:$$

Rechnungsmässige Unkosten.

$$f)\ T''(t-1) \Big\{ \frac{e^{\frac{\delta}{2}}-1}{\delta} - \frac{{}_{t-\frac{1}{2}}V_x^a\, e^{\frac{\delta}{2}} + {}_tV_x^a\, e^{\frac{\delta}{2}}}{2} - h(\tfrac{1}{2}) \frac{P_x^a}{2} (1-\beta)\, e^{\delta} \Big\}$$

$$+ T'(t) \Big\{ \frac{e^{\frac{\delta}{2}}-1}{\delta} - \frac{{}_tV_x^a\, e^{\frac{\delta}{2}} + {}_{t+\frac{1}{2}}V_x^a}{2} - \Big(e^{\frac{\delta}{2}} + h(\tfrac{1}{2}) \Big) \frac{P_x^a}{2} (1-\beta) \Big\}:$$ Risiko-

schadensumme für die im Rechnungsjahr durch Tod ausgeschiedenen Versicherungen.

VI. Die Gewinne in der Invalidenversicherung

§ 1. Das ausreichende Deckungskapital

Das prospektive ausreichende Deckungskapital der anwartschaftlichen, lebenslänglich zahlbaren Invalidenrente ist bei Festsetzung gleicher Unkostenzuschläge vor und nach Rentenbeginn für den ganzzahligen Zeitpunkt $t>0$ dargestellt durch

$${}_t\bar{V}_x^{ai} = (1+\gamma)\, \bar{a}_{x+t}^{ai} + \gamma\, \bar{a}_{x+t}^{aa} - (1-\beta)\, P_x^{ai}\, a_{x+t}^{aa} \qquad (28)$$

oder auch durch

$${}_t\bar{V}_x^{ai} = \bar{a}_{x+t}^{ai} + \gamma\, \bar{a}_{x+t} - (1-\beta)\, P_x^{ai}\, a_{x+t}^{aa}; \qquad (29)$$

dabei ist der Barwert der Belastung durch die Invalidenrente gegeben durch

$$\bar{a}_x^{ai} = \frac{1}{l_x^{aa}} \int_0^\infty e^{-\delta\xi}\, l_{x+\xi}^{aa}\, \nu_{x+\xi}\, \bar{a}_{x+\xi}^{i}\, d\xi\,,$$

wenn ν_x die Invalidierungsintensität und

$$\bar{a}_x^{i} = \frac{1}{l_x^{i}} \int_0^\infty e^{-\delta\xi}\, l_{x+\xi}^{i}\, d\xi$$

den Barwert der laufenden Invalidenrente bedeutet. Für unsere Zwecke ist (28) geeigneter als (29).

Zur Bestimmung des ausreichenden Deckungskapitals für einen gebrochenen Wert von t geht man wiederum vorteilhaft von der Differentialgleichung des Deckungskapitals aus. Es ist in vereinfachter Schreibweise

$$\overline{V}'(\xi) - (\delta + \nu(\xi) + \mu^{aa}(\xi))\, \overline{V}(\xi) + \nu(\xi)\,(1+\gamma)\,\bar{a}^{i}(\xi) + \gamma = 0\,. \quad (30)$$

Setzen wir

$$\begin{aligned} y(\xi) &= \overline{V}(\xi), \\ \varphi(\xi) &= -\delta\,, \\ f(\xi) &= -\left\{(\nu(\xi) + \mu^{aa}(\xi))\, \overline{V}(\xi) - \nu(\xi)\,(1+\gamma)\,\bar{a}^{i}(\xi) - \gamma\right\}, \end{aligned}$$

so ergibt die Integration

$$\overline{V}(k) = e^{\delta k}\, \overline{V}(0) + \int_0^k e^{\delta(k-\xi)} \left\{(\nu(\xi) + \mu^{aa}(\xi))\, \overline{V}(\xi) - \nu(\xi)\,(1+\gamma)\,\bar{a}^{i}(\xi) - \gamma\right\} d\xi\,. \quad (31)$$

Der Integrand in (31) lässt sich wegen (30) durch $\overline{V}'(\xi) - \delta\, \overline{V}(\xi)$ ersetzen, und wir erhalten bei Integration das formal gleiche Ergebnis (6) der Todes- und Erlebensfallversicherung.

§ 2. Die Gewinne im Zeitmoment

Sofern $g(\xi)\, d\xi$ den Anteil eines Versicherten am Gewinn bedeutet, so entfällt auf die Überlebenden ein Betrag in der Höhe von

$$\begin{aligned} l(\xi)\, g(\xi)\, d\xi = {} & l(\xi)\, \overline{V}(\xi)\,(1 + \delta'\, d\xi) - l(\xi)\, \nu'(\xi)\,(1+\gamma)\, \bar{a}^{i}(\xi)\, d\xi - l(\xi)\, \gamma'\, d\xi \\ & - l(\xi)\, \big(1 - (\nu'(\xi) + \mu^{aa\prime}(\xi))\, d\xi\big)\, \overline{V}(\xi) - l(\xi)\, d\, \overline{V}(\xi)\,. \quad (32) \end{aligned}$$

Durch Hinzufügen von Gliedern derart, dass die Rekursionsformel

$$\overline{V}(\xi)(1+\delta\,d\xi) - v(\xi)(1+\gamma)\,\bar{a}^{i}(\xi)\,d\xi - \gamma\,d\xi - (1-(v(\xi)+\mu^{aa}(\xi))\,d\xi)\,\overline{V}(\xi) - d\,\overline{V}(\xi) = 0$$

entsteht, ergibt sich die folgende Zerlegung des Gewinnes,

$$g(\xi)\,d\xi = (v(\xi)-v'(\xi))\,\{(1+\gamma)\,\bar{a}^{i}(\xi) - \overline{V}(\xi)\}\,d\xi + (\mu^{aa\prime}(\xi)-\mu^{aa}(\xi))\,\overline{V}(\xi)\,d\xi + (\delta'-\delta)\,\overline{V}(\xi)\,d\xi + (\gamma-\gamma')\,d\xi. \quad (33)$$

Das Glied

$$(v(\xi)-v'(\xi))\,\{(1+\gamma)\,\bar{a}^{i}(\xi) - \overline{V}(\xi)\}\,d\xi + (\mu^{aa\prime}(\xi)-\mu^{aa}(\xi))\,\overline{V}(\xi)\,d\xi \quad (34)$$

stellt den *Risikogewinn* in $d\xi$ dar. Sodann ist

$$(\delta'-\delta)\,\overline{V}(\xi)\,d\xi \quad (35)$$

der *Zinsgewinn* und schliesslich bedeutet

$$(\gamma-\gamma')\,d\xi \quad (36)$$

den *Unkostengewinn*.

Formal erhalten wir somit für die Zins- und Unkostengewinne in der Invalidenversicherung die gleiche Darstellung wie in der Todes- und Erlebensfallversicherung. Der Risikogewinn hat eine etwas andere Gestalt; in ihm ist nicht nur der Überschuss aus einem günstigen Verlauf des Invaliditätsrisikos enthalten, sondern auch die Gewinne aus der Sterblichkeit. Es ist allerdings formal möglich, wenigstens für das Zeitintervall $d\xi$, die Gewinne aus der Invalidität und aus der Sterblichkeit zu trennen. Der Überschuss aus der Invalidität (der Invalidierungsgewinn im eigentlichen Sinne) wäre gemäss (34) gleich $(v(\xi)-v'(\xi))\,\{(1+\gamma)\,\bar{a}^{i}(\xi) - \overline{V}(\xi)\}\,d\xi$, der Überschuss aus der Sterblichkeit die Ergänzung dazu mit $(\mu^{aa\prime}(\xi)-\mu^{aa}(\xi))\,\overline{V}(\xi)\,d\xi$. Dabei dient $\{v(\xi)(1+\gamma)\,\bar{a}^{i}(\xi) - v(\xi)\,\overline{V}(\xi)\}\,d\xi$ für die Deckung des Invaliditätsrisikos und $-\mu^{aa}(\xi)\,\overline{V}(\xi)\,d\xi$ für die (negative) Deckung der Sterbegefahr. Es kann aber zur Integration nicht wie in (14) ff. $v(\xi)(1+\gamma)\cdot\bar{a}^{i}(\xi) - v(\xi)\,\overline{V}(\xi)$ durch $\delta\,\overline{V}(\xi) - \overline{V}'(\xi) - \gamma$ ersetzt werden, denn diese Möglichkeit gilt nur für $v(\xi)\,\{(1+\gamma)\,\bar{a}^{i}(\xi) - \overline{V}(\xi)\} - \mu^{aa}(\xi)\,\overline{V}(\xi)$ als Ganzes und nicht für den Teil, der zur Deckung des Invaliditätsrisikos allein dient. Das Gewinnschema müsste somit eine ganz andere Form annehmen; wir verzichten für einmal, den aufgeworfenen Gedanken weiter zu verfolgen.

§ 3. Die Risikogewinne im Versicherungsjahr

Mit Hilfe von (30) lässt sich im Risikogewinn (34) das Glied $v(\xi)\{(1+\gamma)\,\bar{a}^i(\xi) - \bar{V}(\xi)\} - \mu^{aa}(\xi)\,\bar{V}(\xi)$ durch $\delta\,\bar{V}(\xi) - \bar{V}'(\xi) - \gamma$ ersetzen. Da aber der Ausdruck $\delta\,\bar{V}(\xi) - \bar{V}'(\xi) - \gamma$ formal gleich demjenigen in der Todes- und Erlebensfallversicherung ist, können wir die Ergebnisse ungeändert übernehmen. Einzig die Bestandesentwicklung ist in etwas anderer Form anzusetzen, indem zu den Todesfällen (es zählen nur solche, die im Zustande der Aktivität eintreten) noch die Invaliditätsfälle $J(\tau)$ hinzukommen. Also ist zu setzen

$$S(\xi) = S(0) + \int_0^{\xi} \big(E(\tau) - A(\tau) - J(\tau) - T(\tau)\big)\,d\tau.$$

Die Risikoschadensumme des Bestandes wird dargestellt durch

$$\int_0^1 e^{\delta(1-\xi)}\,S(\xi)\,\{v'(\xi)\,[(1+\gamma)\,\bar{a}^i(\xi) - \bar{V}(\xi)] - \mu^{aa\prime}(\xi)\,\bar{V}(\xi)\}\,d\xi\,.$$

Weil $S(\xi)\,v'(\xi) = J(\xi)$ und $S(\xi)\,\mu^{aa\prime}(\xi) = T(\xi)$, ist dafür die Näherung

$$J(0)\int_0^1 e^{\delta(1-\xi)}\,\{(1+\gamma)\,\bar{a}^i(\xi) - \bar{V}(\xi)\}\,d\xi - T(0)\int_0^1 e^{\delta(1-\xi)}\,\bar{V}(\xi)\,d\xi$$

$$\sim J(0)\,\frac{e^{\delta}\{(1+\gamma)\,\bar{a}^i(0) - \bar{V}(0)\} + \{(1+\gamma)\,\bar{a}^i(1) - \bar{V}(1)\}}{2} - T(0)\,\frac{\bar{V}(0)\,e^{\delta} + \bar{V}(1)}{2}$$

erlaubt. Ersetzen wir endlich $\bar{V}(0)$ durch $V(0) + (1-\beta)\,P$ und $\bar{V}(1)$ durch $V(1)$, so wird der Risikogewinn im Versicherungsjahr

$$\left.\begin{aligned}
&S(x,t)\,({}_tV_x^{ai} + P_x^{ai})\,e^{\delta} + \big(E(t) - A(t) - J(t) - T(t)\big)\left\{\frac{{}_tV_x^{ai}\,e^{\delta} + {}_{t+1}V_x^{ai}}{2} + \frac{P_x^{ai}}{2}\,e^{\delta}\right\}\\
&- S(x,t+1)\,{}_{t+1}V_x^{ai} - \left\{S(x,t) + \frac{E(t) - A(t) - J(t) - T(t)}{2}\right\}\left(\beta\,P_x^{ai}\,e^{\delta} + \gamma\,\frac{e^{\delta}-1}{\delta}\right)\\
&+ T(t)\,\frac{\{{}_tV_x^{ai} + (1-\beta)\,P_x^{ai}\}\,e^{\delta} + {}_{t+1}V_x^{ai}}{2}\\
&- J(t)\,\frac{e^{\delta}\{(1+\gamma)\,\bar{a}^i_{x+t} - {}_tV_x^{ai} - (1-\beta)\,P_x^{ai}\} + \{(1+\gamma)\,\bar{a}^i_{x+t+1} - {}_{t+1}V_x^{ai}\}}{2}\,.
\end{aligned}\right\}\quad(37$$

Es erübrigt sich, die Risikogewinne im Rechnungsjahr noch darzustellen. Durch sinngemässes Übertragen der bisherigen Überlegungen ist dies ohne weitere Mühe möglich.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit versuchten wir, Formeln für die Sterblichkeits- und Invalidierungsgewinne nach der kontinuierlichen Methode abzuleiten. Dabei war es unser Hauptziel, eine den wirklichen Verhältnissen möglichst angepasste Darstellung der Gewinne zu erhalten; dies geschah über die Einführung der sogenannten halbstetigen Methode, worin stetige (Versicherungsleistungen) und unstetige Vorgänge (Prämie) nebeneinander vorkommen.

Die getroffenen Voraussetzungen führten zu einem Gewinn- und Verlustschema, das sich in verschiedenen Fällen wertmässig, nicht aber inhaltlich von der diskontinuierlichen Darstellung unterscheidet. Für den Praktiker, dem die kontinuierliche Methode bisher etwas ferner lag, dürfte dieser Umstand erleichternd wirken.

Literaturverzeichnis [1])

[1] *A. Berger*, Prinzipien der Lebensversicherungstechnik. Band I, 1923.

[2] *R. Dolezel*, Die Zerlegung der Gewinn- und Verlustrechnung in der Lebensversicherung nach Gewinnquellen. Veröffentlichungen des Deutschen Vereins für Versicherungs-Wissenschaft, Heft 61, 1938.

[3] *H. Nöbel*, Die Zerlegung der Gewinn- und Verlustrechnung in der Lebensversicherung nach Gewinnquellen. Veröffentlichungen des Deutschen Vereins für Versicherungs-Wissenschaft, Heft 61, 1938.

[4] *E. Zwinggi*, Versicherungsmathematik. Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, 1945.

[5] *E. Zwinggi*, Über die Bedeutung der infinitesimalen Betrachtungsweise für die Grundlagen der Versicherungstechnik. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Band 46, 1946.

[6] Berichte des IX. Internationalen Kongresses der Versicherungsmathematiker, Band 1, 1930.

---

[1]) Wir haben uns im Literaturverzeichnis auf einige wenige Werke beschränkt, da die wohl zahlreiche Literatur über die Gewinnermittlung und Gewinnverteilung sich fast ausschliesslich auf die diskontinuierliche Methode stützt.

Curriculum vitae

Ich wurde als Sohn des Josef Bütler (Buchhalter) und der Fanny geb. Flückiger am 10. Dezember 1924 in Liestal geboren. Nach Besuch der Primarschule in Frenkendorf und der Bezirksschule in Liestal wurde ich in das Mathematisch-naturwissenschaftliche Gymnasium in Basel aufgenommen und bestand im Frühling 1944 die Maturität. Hierauf immatrikulierte ich mich an der Universität Basel, um mich besonders dem Studium der Versicherungswissenschaften, der Mathematik, der Experimentalphysik und der Nationalökonomie zu widmen. Während meiner ganzen Studienzeit war ich ungefähr ein Jahr lang bei der Steuerverwaltung des Kantons Baselland praktisch tätig und verbrachte mehrere Monate bei einem Lloyd'sbroker in London.

Den Herren Professoren Batschelet, Brogle, Buchner, Furlan, Gürtler, Huber, Miescher, Ostrowski, Renfer, Salin, Speiser, Spiess, Staehelin, Wagner und Zwinggi danke ich für die Anregungen, die ich beim Besuche ihrer Vorlesungen, Übungen und Seminarien empfangen habe.

Die vorliegende Arbeit ist auf Veranlassung von Herrn Prof. Dr. E. Zwinggi entstanden; für die mir gewährte Unterstützung möchte ich ihm an dieser Stelle meinen besonderen Dank aussprechen.

Werner Hans Bütler